§ 17 Топологическое многообразие с краем

Определение 1 *n-мерным топологическим многообразием с краем* называется всякое хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, удовлетворяющее условию: для всякой его точки существует окрестность, гомеоморфная либо пространству R^n, либо полупространству $\mathrm{R}^n_0 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Определение 2 Множество всех точек многообразия M^n, имеющих окрестность, гомеоморфную R^n называют *внутренностью многообразия* M^n и обозначают $\operatorname{int} M^n$.

Определение 3 Точка $q \in M^n$ называется *краевой точкой многообразия* M^n, если у нее имеется окрестность V_q, гомеоморфная полупространству R^n_0, причем связывающий их гомеоморфизм $\varphi : V_q \to \mathrm{R}^n_0$ переводит точку q^n в некоторую точку гиперплоскости, граничной для R^n_0. Множество всех краевых точек называется *краем* M^n и обозначается ∂M^n.

Определение 4 Топологическое многообразие, множество краевых точек которого не пусто, называется *многообразием с краем,* а многообразие, все точки которого являются внутренними, называется *многообразием без края*.

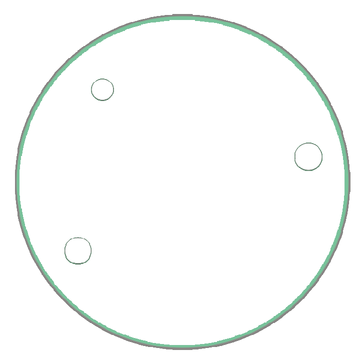
Определение 5 Компактное топологическое многообразие без рая называется *замкнутым.* Топологическое многообразие называется *открытым,* если у него нет компактных компонент.

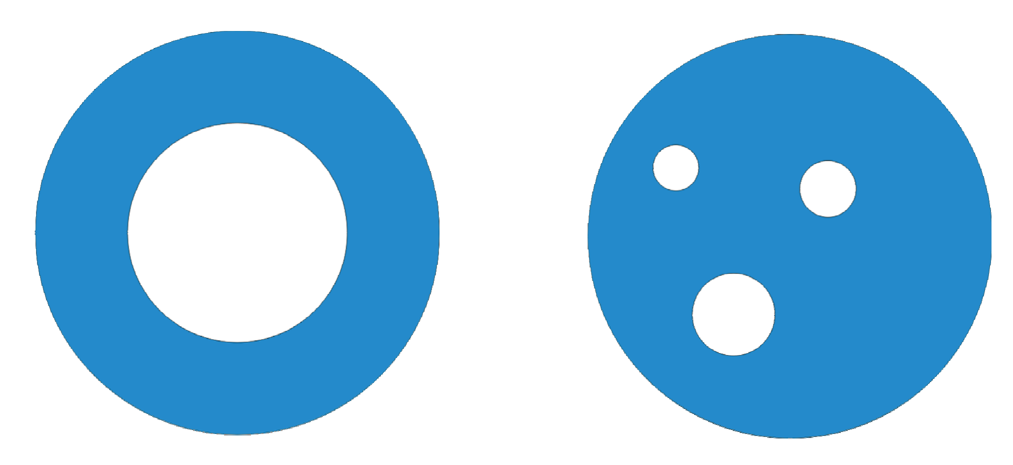
Пример 1 Полупространство $\mathrm{R}^n_0 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n : x_n \geq 0\}$ - n мерное многообразие с краем, краем ∂M^n является гиперплоскость R^{n-1}, заданная уравнением $x_n = 0$. Внутренность $\operatorname{int} R^n_0$ – открытое полупространство R^n_+, заданное неравенством $x_n > 0$.

Пример 2 Замкнутый шар
$B^n[a,r] = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 \leq r^2\}$ - n мерное многообразие с краем. Краем ∂B^n является сфера $S^{n-1}(a,r)$, заданная уравнением
$(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = r^2$. Внутренность – это открытый шар
$B^n(a,r) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 < r^2\}$.

Пример 3 Отрезок [0;1] одномерное многообразие с краем $\partial[0;1] = \{0,1\}$, $\operatorname{int}[0;1] = (0;1)$- отрытый интервал.

Пример 4 Пусть M^n - замкнутое многообразие, а $M^{n+1} = M^n \times [0;1]$. Тогда M^{n+1} - (n+1) – мерное многообразие, называемое *цилиндром*, основания которого $M^n \times \{0\}$ и $M^n \times \{1\}$ являются краем.





На рисунках изображены различные двумерные многообразия с краем (фера с дырками, кольцо, круг с дырками).

§18 Клеточные разбиения. Характеристика Эйлера - Пуанкаре

Обозначим B^k замкнутый шар единичного радиуса в пространстве R^k, а через $\operatorname{int} B^k$ - его внутренность. В случае k=0 будем считать, что нульмерный шар и его внутренность состоят из единственной точки.

Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство.

Определение 1. Подмножество e^k топологического пространства X называется *k-мерной отрытой клеткой в X,* если существует такое непрерывное отображение $f : B^k \to X$, под действием которого $\operatorname{int} B^k$ гомеоморфно отображается на e^k.

Такое отображение f называется *характеристическим* для клетки e^k.

Определение 2. *Клеточное разбиение* – это пара, состоящая из хаусдорфова топологического пространства X – *пространства разбиения*, - и системы его непересекающихся подмножеств $\{e_\alpha\}$, покрывающих пространство X, для которых выполняются следующие условия:

1. каждое подмножество e_α семейства $\{e_\alpha\}$ представляет собой открытую клетку размерности $n(\alpha) \geq 0$;
2. граница каждой k- мерной клетки семейства $\{e_\alpha\}$ содержится в объединении всех клеток из $\{e_\alpha\}$, размерности которых меньше k. Это объединение называется *(k-1)- мерным остовом разбиения* $\{e_\alpha\}$, обозначается T^{k-1};
3. подмножество пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием любой клетки из $\{e_\alpha\}$;
4. любая клетка содержится в замкнутом множестве, являющимся объединением конечного числа клеток семейства $\{e_\alpha\}$.

Определение 3. Хаусдорфово топологическое пространство X, для которого существует покрытие $\{e_\alpha\}$, удовлетворяющее требованиям определения 2 , называется *клеточным пространством*.

Определение 4. Клеточное пространство называется *конечным (счетным)* если оно допускает разбиение на конечное (счетное) число клеток.

Замечание: Возможен индуктивный подход к построению клеточных пространств.

Определение 5. Размерностью клеточного пространства X называется верхняя граница размерностей его клеток. Обозначается dimX.

По определению $\dim T^k \le k$ и $\dim T^k = k$ тогда и только тогда, когда $T^k \ne T^{k-1}$. Таким образом, если dimX = *n,* то $T^m = X$ для любого $m \ge n$.

Клеточное пространство нульмерно тогда и только тогда, когда оно дискретно.

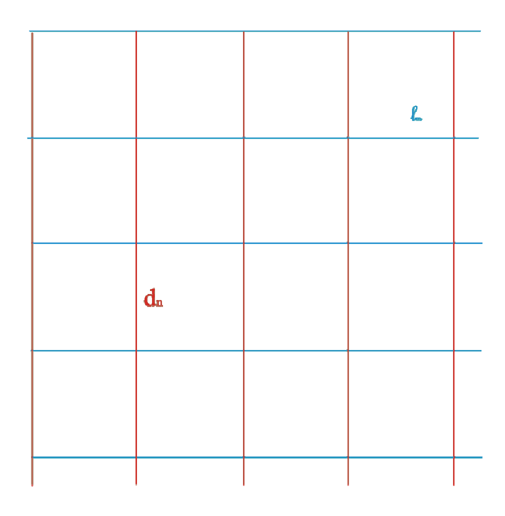
Все клеточные пространства, за исключением нульмерного, допускают бесконечно много клеточных разбиений.

Перечислим (без доказательства) некоторые свойства клеточных пространств.

- Клеточное пространство компактно в том и только в том случае, когда оно дискретно;
- Клеточное пространство связно в том и только в том случае, если связен его первый остов;
- Клеточное пространство сепарабельно в том и только в том случае, если оно счетно;
- Для того чтобы клеточное пространство обладала счетной базой, необходимо и достаточно чтобы оно было счетным и локально конечным (каждая точка должна обладать окрестностью, пересекающейся только с конечным числом клеток);
- Клеточное пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно локально конечно.

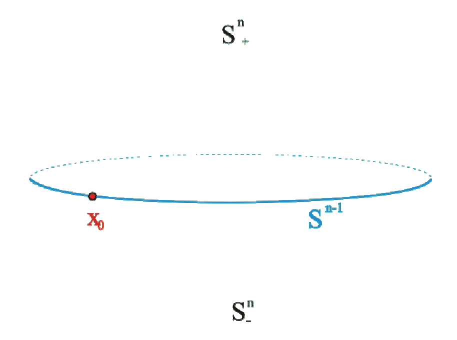
Пример 1. Плоскость E^2 допускает клеточное разбиение, состоящее из счетных совокупностей нульмерных, одномерных и двумерных клеток.

Для этого возьмем в E^2 два семейства прямых $\{l_m\}$ и $\{d_n\}$, заданных уравнениями: $l_m : x = m;\ \ d_m : y = n;\ \ m, n \in Z$. В результате плоскость разбивается на счетное семейство квадратов, внутренности которых – двумерные клетки, стороны (без концов) – одномерные клетки, а вершины – нульмерные клетки.

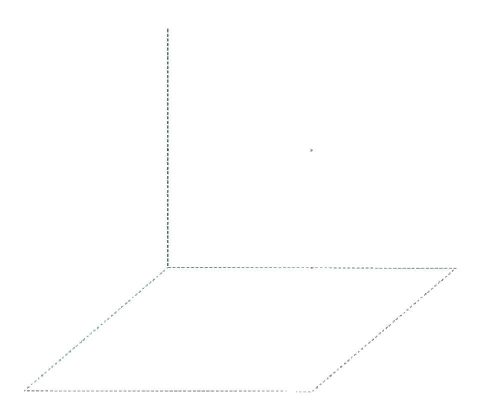


Пример 2. Сфера S^n допускает клеточное разбиение, состоящее из нульмерной клетки – точки x_0 и одной *n*- мерной клетки $S^n/\{x_0\}$.

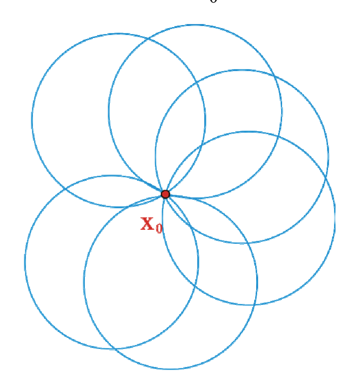
Пример 3. Сфера S^n может быть разбита на клетки другим способом: S_+^n и S_-^n («верхняя» и «нижняя» полусферы), одну *(n-1)*- мерную клетку $S^{n-1}/\{x_0\}$, где S^{n-1} - «экватор», а x_0 - точка «экватора» и одну нульмерную клетку x_0 .



Пример 4. Выпуклый многогранник в E^3 допускает следующее клеточное разбиение: внутренность многогранника является трехмерной клеткой, внутренности граней – двумерные клетки, ребра (без концов) – одномерные клетки, вершины являются нульмерными клетками.



Пример 5. Букет B_m из *m* окружностей, склеенных в точке x_0, допускает клеточное разбиение, состоящее из нульмерной клетки x_0 и *m* одномерных клеток – окружностей букета, проколотых в точке x_0.



Замечание. Если клеточное разбиение состоит из конечного числа клеток, условия 3 и 4 определения клеточного разбиения выполняются автоматически из предыдущих условий. В случае бесконечного числа клеток это не так.

Известно, что всякое *n*- мерное топологическое многообразие M^n является клеточным пространством, причем размерность M^n равно *n*. Если M^n компактное многообразие, то для любого клеточного разбиения число клеток каждой размерности конечно.

Обозначим через ω_i количество клеток размерности *i* в некотором клеточном разбиении компактного многообразия M^n, причем клеток каких то промежуточных размерностей в разбиении может и не быть.

Определение 6. Число

$$\chi\left(M^n\right)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\omega_i$$

называется *характеристикой* Эйлера – Пуанкаре компактного топологического многообразия M^n.

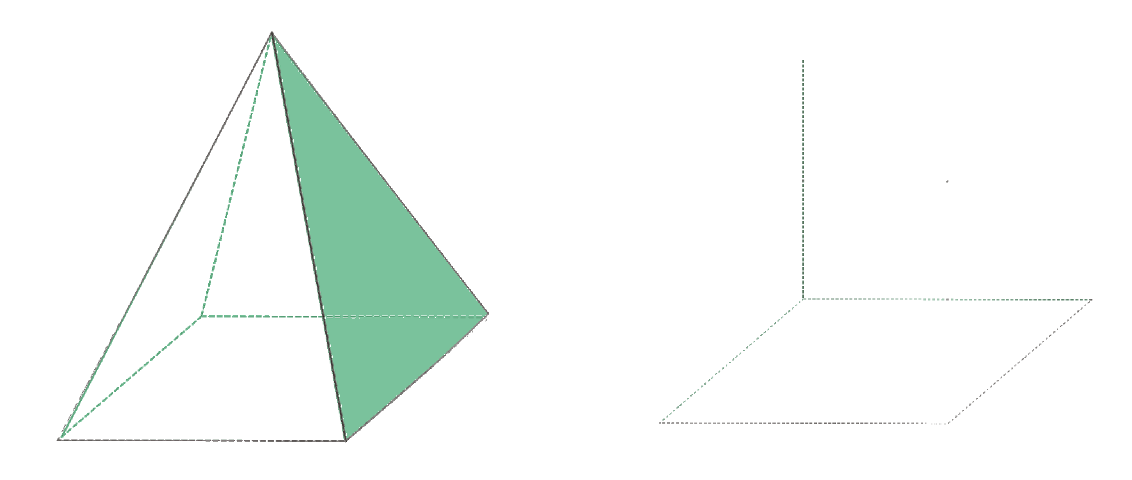
(Корректность такого определения обычно доказывается в курсах алгебраической топологии). Эта характеристика не зависит от разбиения, а зависит от строения самого многообразия и является одним из важнейших топологических инвариантов.

Пример 6. Используя клеточные разбиения сферы S^n, рассмотренные в примерах 2 и 3, получаем, что

$$\chi\left(S^n\right)=\begin{cases}2, & \text{если } n \text{ четтно,}\\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно.}\end{cases}$$

В частности нульмерная сфера состоит из двух точек – концов одномерного шара в R^1, поэтому $\chi\left(S^0\right)=2$.

Пример 7. Если M^2 - поверхность выпуклого многогранника в E^3, то его вершины можно взять в качестве нульмерных клеток, ребра без концов - в качестве одномерных, а внутренности граней будут служить двумерными клетками. Легко подсчитать в случае куба, тетраэдра и т.д. что $\chi\left(M^2\right)=2$.



Этот результат следует также из инвариантности χ и гомеорфности поверхности выпуклого многогранника поверхности сферы.

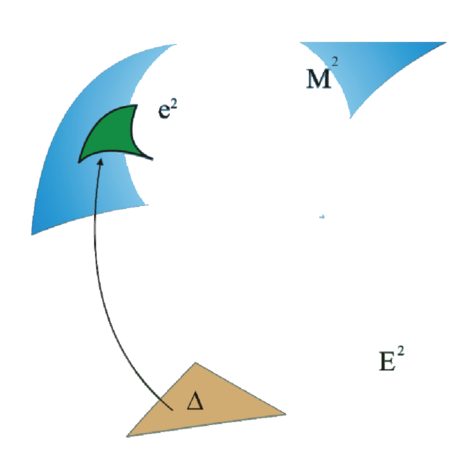
§19 Двумерные многообразия

П.1 Ориентируемые и неориентируемые многообразия

Связные n-мерные топологические многообразия подразделяются на 2 класса: ориентируемые и неориентируемые. Неориентируемые топологические многообразия иначе называются односторонними. Простейшим из них является лист Мёбиуса. Неориентируемыми будут двумерные многообразия, которые содержат лист Мёбиуса как свою часть.

Будем вводить понятие ориентируемости и неориентируемости с помощью специального клеточного разбиения – триангуляции. При этом рассматриваемые многообразия могут быть как с краем, так и без края.

Определение 1. Пусть M^2 двумерное топологическое многообразие, а Δ - некоторый треугольник в евклидовой плоскости E^2, $\varphi:\Delta\to M^2$ - отображение переводящее треугольник Δ гомеоморфно на некоторое множество $e^2\subset M^2$. Тогда подмножество e^2 называют *топологическим треугольником в* M^2, образы сторон треугольника Δ - *сторонами* треугольника e^2, а образы вершин – *вершинами.*



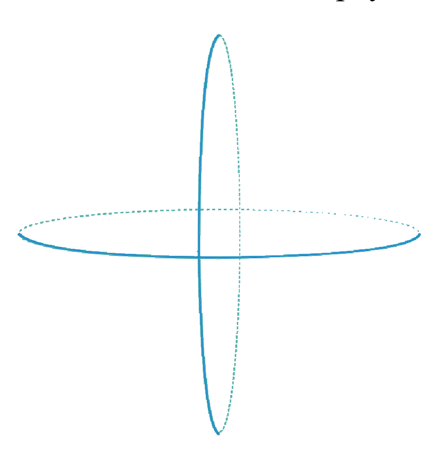
Определение 2 *Триангуляцией* двумерного топологического многообразия M^2 называется разбиение M^2 на такую совокупность топологических треугольников $\{e_\alpha^2\}$, для которой выполняются следующие условия:

1. множество треугольников $\{e_\alpha^2\}$ образуют покрытие многообразия M^2;
2. пересечение любых двух различных треугольников из $\{e_\alpha^2\}$ либо пусто, либо является их общей вершиной, или общей стороной;
3. для каждой точки $x\in M^2$ должна существовать такая окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом треугольников из $\{e_\alpha^2\}$.

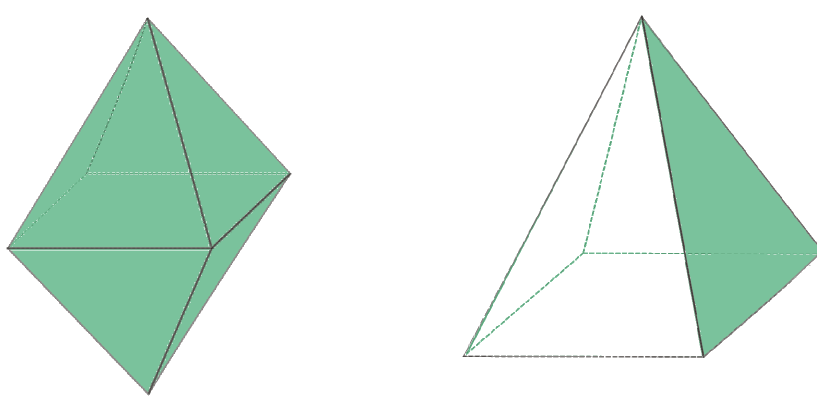
Очевидно, что любая триангуляция представляет собой клеточное разбиение. Условие 3 в определении триангуляции необходимо лишь для некомпактных многообразий.

Впервые существование триангуляции на произвольном двумерном многообразии было доказано в 1925 году венгерским математиком Тибором Радо.

Триангулированное многообразие – многообразие с заданной на нем триангуляцией – можно пони мать как многообразие, построенное посредством склеивания его по определенным правилам из различных топологических треугольников. Так двумерную сферу можно склеить из восьми треугольников.



Возможны другие варианты склеивания для других двумерных многообразий.



Определение 3. Пусть e^2 - треугольник некоторой триангуляции $\{e^2_\alpha\}$ двумерного топологического многообразия M^2. A,B,C – вершины треугольника e^2. *Ориентацией* стороны AB треугольника e^2 называется порядок в паре ее концов A и B.

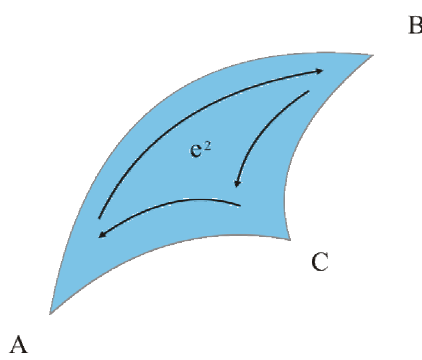
Каждая сторона имеет две ориентации (A,B) и (B,A), эти ориентации называются *противоположными*.

Определение 4. *Ориентацией (обходом)* треугольника e^2 с вершинами A, B, C называется порядок в тройке этих вершин. Две ориентации треугольника e^2 называются *эквивалентными,* если они получаются друг из друга циклической подстановкой.

Таким образом, совокупность всех ориентаций треугольников e^2 можно разбить на два класса, каждый из которых состоит из ориентаций, эквивалентных между собой – это класс {(A,B,C), (B,C,A), (C,A,B)} и класс {(C,B,A), (B,A,C), (A,C,B)}. Тем самым треугольник можно наделить одной из двух ориентаций. Если

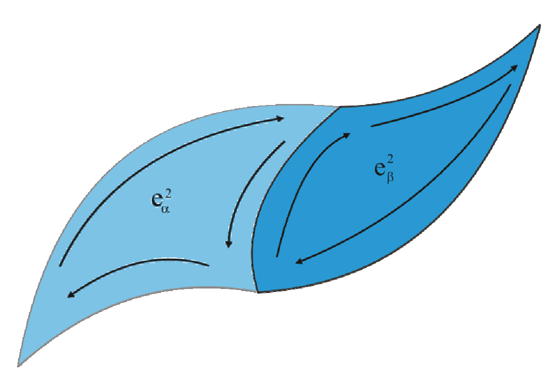
для треугольника выбрана одна из его ориентаций, то такой треугольник называют *ориентированным*.

Ориентация треугольника e^2 порождает (индуцирует) ориентацию каждой из его сторон.



Введем теперь понятие согласованности ориентаций для соседних треугольников триангуляции – треугольников имеющих общую сторону.

Определение 5. Говорят, что два соседних ориентированных треугольника триангуляции $\{e_\alpha^2\}$ многообразия M^2 имеют *согласованные* ориентации, если ориентации треугольников индуцируют противоположные ориентации общей стороны.

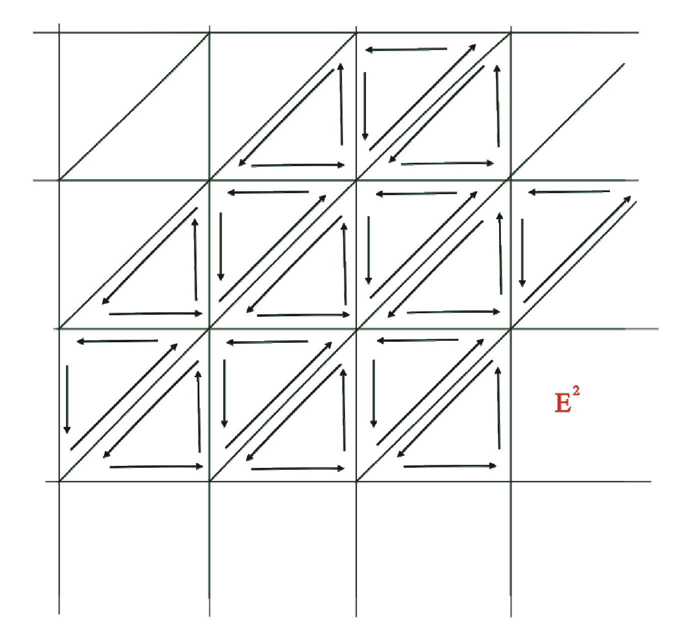


Определение 6. Двумерное топологическое многообразие M^2 называется *ориентируемым,* если существует такая его триангуляция, в которой треугольники ориентированы так, что ориентация любых двух соседних треугольников противоположны. Если же такой триангуляции не существует, то многообразие называется неориентируемым.

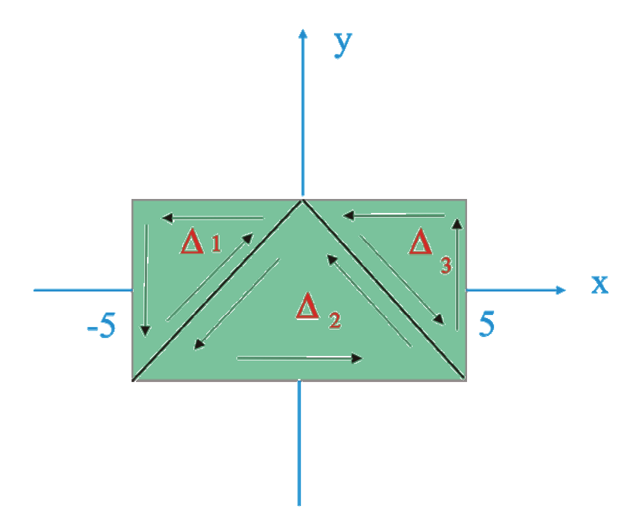
Замечание. В теории многообразий доказывается, что если для некоторой триангуляции многообразия M^2 можно задать согласованные ориентации ее треугольников, то это можно сделать и для любой другой триангуляции. Таким образом, определение 6 корректно.

Если указанная в определении триангуляция многообразия M^2 введена, то многообразие M^2 называется *ориентированным* (очевидно, что ориентируемое двумерное многообразие можно ориентировать точно двумя способами).

Пример 1. Евклидова плоскость E^2 – ориентируемое многообразие, ее триангуляция и согласованные ориентации приведены на рисунке.



Пример 2. Лист Мёбиуса неориентируем. Разобьем прямоугольник $\Pi\{-5 \leq x \leq 5; -1 \leq y \leq 1\}$ из которого склеивается лист Мёбиуса на три треугольника. При согласовании ориентаций не удается согласовать пару треугольников: (Δ_1, Δ_3) на их общей (после склеивания стороне).



П. 2 Классификация одномерных и замкнутых двумерных многообразий

Справедлива теорема (доказательство в кн. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука., 1997. – 488с.)

Теорема 1. Всякое связное одномерное топологическое многообразие без края гомеоморфно евклидовой прямой или окружности. Всякое связное одномерное многообразие с краем гомеоморфно отрезку или лучу.

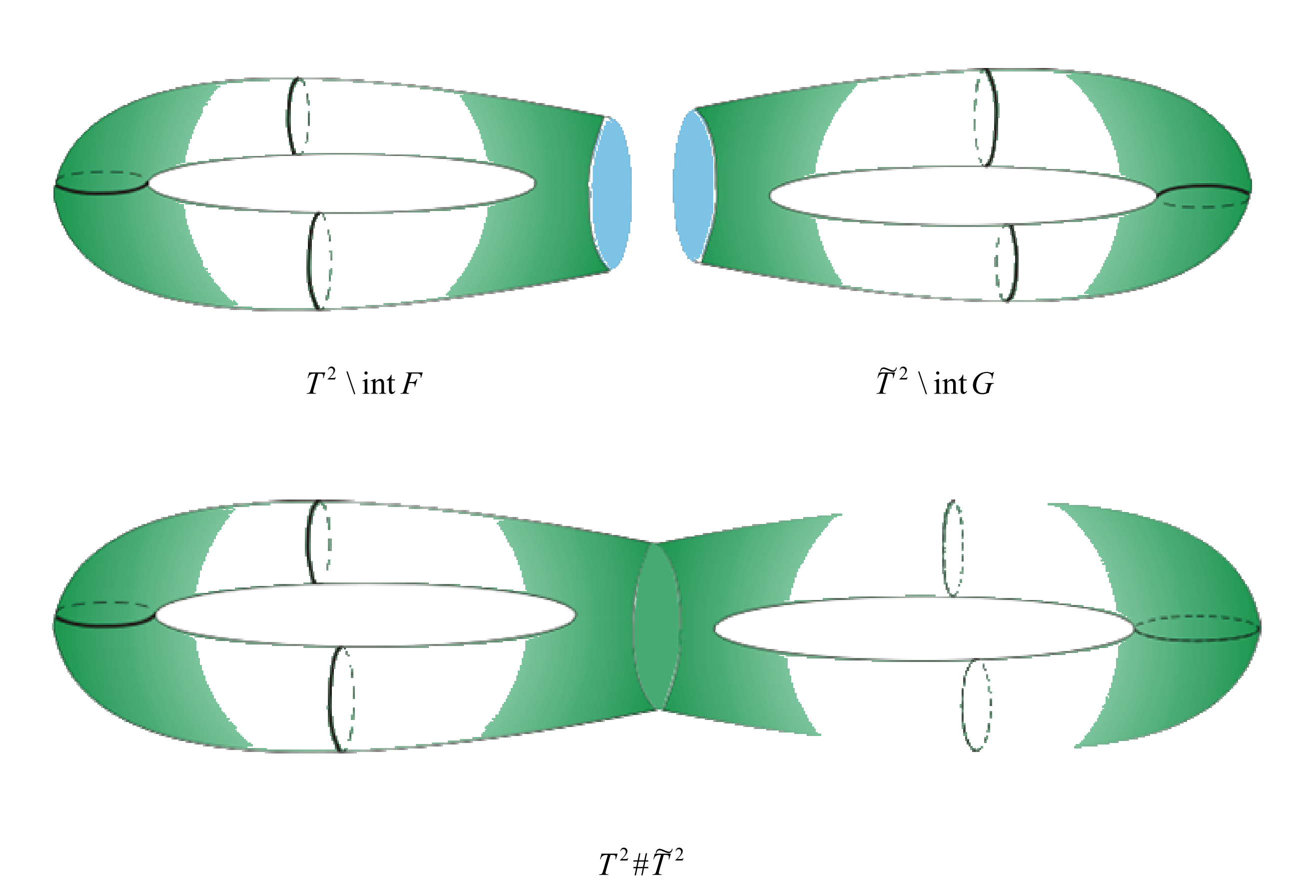
Для описания возможных типов двумерных замкнутых многообразий необходимо ввести новую операцию, которую назовем «связной суммой многообразий». Будем эту операцию обозначать значком # .

Пусть M^2 и L^2 - связные замкнутые двумерные топологические многообразия , а F и G – компактные подмножества M^2 и L^2, причем каждое из них гомеоморфно кругу B^2 евклидовой плоскости. Тогда границы $\gamma_1 = \partial F$ и $\gamma_2 = \partial G$ гомеоморфны окружности – границе ∂B^2 круга B^2.

Пусть h – гомеоморфизм, связывающий $\partial F = \gamma_1$ и $\partial G = \gamma_2$.

Определение 1. *Связной суммой* двумерных связных замкнутых топологических многообразий M^2 и L^2 - $M^2 \# L^2$ - называется такое двумерное топологическое многообразие, которое является факторпространством пространства $(M^2 \setminus \operatorname{int} F) \cup (L^2 \setminus \operatorname{int} G)$, получаемым при отождествлении точек *x* и *h(x)* для всех *x* на границе $\gamma_1 = \partial F$.

Пример 1. Пусть T^2 и $\tilde{T}^2$ - два двумерных тора, тогда их связная сумма $T^2 \# \tilde{T}^2$ является многообразием, называемым *кренделем.*



$T^2 \setminus \operatorname{int} F$ $\qquad$ $\tilde{T}^2 \setminus \operatorname{int} G$

$T^2 \# \tilde{T}^2$

Классификационную теорему для замкнутых двумерных многообразий можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. Всякое связное замкнутое двумерное ориентируемое многообразие гомеоморфно сфере, либо связной сумме конечного числа торов.

Всякое связное замкнутое двумерное неориентируемое многообразие гомеоморфно сумме конечного числа проективных плоскостей.
можно сформулировать по-другому.

Всякое связное замкнутое двумерное неориентируемое многообразие гомеоморфно либо проективной плоскости, либо связной сумме бутылки Клейна и некоторого связного замкнутого ориентируемого двумерного многообразия.

Справедливо утверждение:

Теорема 3. Связная сумма двух проективных плоскостей гомеоморфна бутылке Клейна.

Замечание 2. Вторую теорему часто формулируют в терминах ручек и плёнок: ручкой называют двумерное топологическое многообразие с краем, гомеоморфное тору с дыркой, а пленкой называют часть двумерного многообразия, эквивалентного листу Мёбиуса. Вместо операции связной суммы для торов и проективных плоскостей при конструировании различных топологических типов замкнутых двумерных многообразий можно использовать операции приклеивания ручек и пленок к такому простому многообразию как сфера с дырами. Ясно, что число дыр в сфере должно совпадать с количеством приклеиваемых ручек и пленок.



Введем еще одно часто употребляемое понятие.

Определение 2. Замкнутое двумерное топологическое многообразие M^2 называется *многообразием рода n,* если M^2 является связной суммой *n* торов или *n* проективных плоскостей. При этом сфера – многообразие нулевого рода.

Род многообразия M^2 и (обозначается $g(M^2)$) связан с характеристикой Эйлера-Пуанкаре следующими равенствами:

Для ориентируемых многообразий

$$\chi(M^2) = 2 - 2g(M^2).$$

Для неориентируемого многообразия

$$\chi(M^2) = 2 - g(M^2)$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Связные замкнутые двумерные многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда оба они ориентируемы или неориентируемы и их характеристики Эйлера – Пуанкаре равны.

В заключение пункта укажем на полный набор топологических инвариантов для компактных двумерных многообразий с краем.

Полный набор топологических инвариантов связного компактного двумерного топологического многообразия с краем составляют: число компонент края, значение характеристики Эйлера – Пуанкаре и ориентируемость или неориентируемость многообразия.